数理解析研究所講究録
751巻 1991年 99-105

群表現のCohomologyについて

茨城大・教養　玉城和宏 (Kazuhiro Tamaki)

非可換コホモロジーが群の表現と完全系列に関連して定義されることを作用素環の場合を例にとり示す。

Mを作用素環, $\mathfrak{Z}(M)$をMの中心, M^uをMのユニタリー作用素全体, $\mathfrak{Z}(M)^u$を中心のユニタリー作用素全体とする。Mの自己同型写像の全体を$\mathrm{Aut}M$, 内部自己同型写像全体を$\mathrm{Int}M$, 外部自己同型写像の類別を$\mathrm{Out}M=\mathrm{Aut}M/\mathrm{Int}M$で表わす。$\varepsilon$を$\mathrm{Aut}M$から$\mathrm{Out}M$への自然な準同型写像. AdをM^uから$\mathrm{Int}M$への自然な準同型写像とする。我々の考える完全系列は

$$1 \longrightarrow \mathfrak{Z}(M)^u \longrightarrow M^u \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{Aut}M \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Out}M \longrightarrow 1$$

で各段階における準同型の像を"$-$"を使って表わす
例えば　$\mathrm{Ad}u=\bar{u}$, $\mathrm{Aut}M \ni \alpha \longrightarrow \bar{\alpha} \in \mathrm{Out}M$　等である. 更に各群上での内部自己同型写像を左肩に記し

$${}^{\alpha_g}\bar{u} = \alpha_g \bar{u} \alpha_g^{-1}$$ で表わす。

群 G に対し完全系列に関するコサイクル、コホモロジーを順次定義する。

G から $\mathrm{Out}M$ への表現を1－コサイクルとしその全体を $Z^1(G,\mathrm{Out}M)=\mathrm{Rep}(G,\mathrm{Out}M)$ とする。

1次元コホモロジーを

$$H^1(G,\mathrm{Out}M)=Z^1(G,\mathrm{Out}M)$$

と定義する。

$Z^1(G,\mathrm{Out}M)\ni\overline{\alpha}$ に対し $\overline{\alpha}_g$ のリフトを $\alpha_g\in\mathrm{Aut}M$ とし $\alpha_e=1$ とする。e は G の単位元, 1 は完全系列上の各群の単位元を表わすものとする。α は一般に G の表現とはならないのでその差を $\tau_\alpha(g,h)\in\mathrm{Int}M$ を使って表わす、即ち $\alpha_g\alpha_h=\tau_\alpha(g,h)\alpha_{gh}$ である。

$\alpha_e=1$ より $g=e$ 又は $h=e$ ならば $\tau_\alpha(g,h)=1$ となる。更に τ_α は関係式

$$^{\alpha_g}\tau_\alpha(h,k)\,\tau_\alpha(g,hk)=\tau_\alpha(g,h)\,\tau_\alpha(gh,k)$$

を満足する、即ち $\tau_\alpha:G\times G\to\mathrm{Int}M<\mathrm{Aut}M$ は図

$$\begin{tikzcd}
 & \alpha_g\alpha_h\alpha_k \arrow[dl, "{^{\alpha_g}\tau_\alpha(h,k)}"'] \arrow[dr, "{\tau_\alpha(g,h)}"] & \\
\alpha_g\alpha_{hk} \arrow[dr, "{\tau_\alpha(g,hk)}"'] & & \alpha_{gh}\alpha_k \arrow[dl, "{\tau_\alpha(gh,k)}"] \\
 & \alpha_{ghk} &
\end{tikzcd}$$

に対応する。

Remark. $\overline{\iota}_1(g,h)\alpha_g\alpha_h = \alpha_{gh}$ とすると

$\overline{\iota}_1(g,h) = \overline{\iota}_\alpha(g,h)^{-1}$, $\alpha_g\overline{\iota}_2(g,h)\alpha_h = \alpha_{gh}$ とすると

${}^{\alpha_g}\overline{\iota}_2(g,h) = \overline{\iota}_1(g,h)$ となる。

この様な $\overline{\iota}_\alpha$ の全体を $Z^2(G, \mathrm{Int}M)$ としその元を2-コサイクルという。$Z^2(G, \mathrm{Int}M)$ 上の同値関係 $\sim$ として $Z^2(G, \mathrm{Int}M) \ni \overline{\iota}_\alpha, \overline{\iota}_\beta$ に対し

$$\overline{\iota}_\alpha \sim \overline{\iota}_\beta \iff \overline{\alpha}_g = \overline{\beta}_g \qquad {}^\forall g \in G$$

と定義する。

$\overline{\iota}_\alpha$ と $\overline{\iota}_\beta$ の関係式を求めると $\overline{u}_g \cdot \alpha_g = \beta_g$, ${}^\forall g \in G$

$\overline{u}_g \in \mathrm{Int}M$ とおけるから

$$\overline{u}_g\alpha_g \cdot \overline{u}_h\alpha_h = \beta_g \cdot \beta_h = \overline{\iota}_\beta(g,h)\beta_{gh} = \overline{\iota}_\beta(g,h)\overline{u}_{gh}\alpha_{gh}$$

一方

$$\overline{u}_g\alpha_g \cdot \overline{u}_h\alpha_h = \overline{u}_g{}^{\alpha_g}\overline{u}_h\alpha_g \cdot \alpha_h = \overline{u}_g{}^{\alpha_g}\overline{u}_h\overline{\iota}_\alpha(g,h)\alpha_{gh}$$

よって

$$\overline{u}_g{}^{\alpha_g}\overline{u}_h\overline{\iota}_\alpha(g,h) = \overline{\iota}_\beta(g,h)\overline{u}_{gh}$$

となる。

特に α が表現のとき、即ち $\alpha \in Z^1(G, \mathrm{Aut}M)$ のとき β を α の $\overline{u}_g \in \mathrm{Int}M$ の Perturbation とみると関係式は

$$\overline{u}_g{}^{\alpha_g}\overline{u}_h\overline{u}_{gh}^{-1} = \overline{\iota}_\beta(g,h)$$

となる。　この τ_β を 2－コバンダリー という。
以上のことから 2次元コホモロジー を $Z^2(G, \mathrm{Int}M)$ の同値類別

$$H^2(G, \mathrm{Int}M) = Z^2(G, \mathrm{Int}M)/\sim$$

と定義する。

次に3次のコサイクル、コホモロジー を定義する
各 $\tau_\alpha \in Z^2(G, \mathrm{Int}M)$ に対し $l_\alpha(g, e) = l_\alpha(e, h) = 1$ となるリフトを考える。$l_\alpha(g, h) \in M^u$ である。
$\mathrm{Aut}M$ の M^u への自然な作用は $\mathrm{Aut}M$ の $\mathrm{Int}M$ への Adjoint 作用 即ち、内部自己同型を通しての作用と両立するので ${}^{\alpha_g}\tau_\alpha(h, k) = \overline{\alpha_g(l_\alpha(h, k))}$ が成り立つ
$\alpha_g(l_\alpha(h, k))$ を ${}^{\alpha_g}l_\alpha(h, k)$ と記すと

$${}^{\alpha_g}\tau_\alpha(h, k)\tau_\alpha(g, hk) = \tau_\alpha(g, h)\tau_\alpha(gh, k)$$

は

$$\overline{{}^{\alpha_g}l_\alpha(h, k)\, l_\alpha(g, hk)} = \overline{l_\alpha(g, h)\, l_\alpha(gh, k)}$$

よって

$${}^{\alpha_g}l_\alpha(h, k)\, l_\alpha(g, hk) = \bar{f}_\alpha(g, h, k)\, l_\alpha(g, h)\, l_\alpha(gh, k)$$

, $\bar{f}_\alpha(g, h, k) \in \ker \mathrm{Ad} = \mathfrak{z}(M)^u$ と表わせる。
明らかに $g = e$ 又は $h = e$ 又は $k = e$ ならば $\bar{f}_\alpha(g, h, k) = 1$ が成立つ。　$\bar{f}$ に関する関係式は $\mathfrak{z}(M)^u$ が可換でないとすると

$$ {}^{\alpha_l}\bar{f}_\alpha(m,n,s)\,\bar{f}_\alpha(l,m,n)^{u_\alpha(l,m)\,u_\alpha(lm,n)\,u_\alpha(l,mn)^{-1}}\,\bar{f}_\alpha(l,mn,s) $$

$$ = {}^{u_\alpha(l,m)}\bar{f}_\alpha(lm,n,s)^{u_\alpha(lm,n)\,u_\alpha(lm,ns)\,u_\alpha(l,m)^{-1}}\,\bar{f}_\alpha(l,m,ns) $$

をみたす。この式は次図

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \alpha_l\alpha_m\alpha_n\alpha_s \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] \arrow[drr, dash] & & & \\
 & \alpha_{lm}\alpha_n\alpha_s \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \alpha_l\alpha_{mn}\alpha_s \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \alpha_l\alpha_m\alpha_{ns} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\alpha_{lm}\alpha_{ns} \arrow[drrr, dash] & & \alpha_{lmn}\alpha_s \arrow[dr, dash] & & \alpha_l\alpha_{mns} \arrow[dl, dash] & & \alpha_{lm}\alpha_{ns} \arrow[dlll, dash] \\
 & & & \alpha_{lmns} & & &
\end{tikzcd}
$$

に対応する。

この $\bar{f}_\alpha$ の集合を $Z^3(G,\mathfrak{Z}(M)^u)$ と表わし $\bar{f}_\alpha$ を3－コサイクルという。$Z^3(G,\mathfrak{Z}(M)^u) \ni \bar{f}_\alpha, \bar{f}_\beta$ に対し同値関係をそれぞれに対応する u_α, u_β により

$$ \bar{f}_\alpha \sim \bar{f}_\beta \iff \bar{u}_\alpha = \bar{u}_\beta $$

と定義する。

上記同値関係より $\overline{{}^{\alpha_g}u_\alpha(h,k)} = \overline{{}^{\beta_g}u_\beta(h,k)}$

よって $\bar{n}(g,h,k)\,{}^{\alpha_g}u_\alpha(h,k) = {}^{\beta_g}u_\beta(h,k)$

ここに $\bar{n}(g,h,k) \in \mathfrak{Z}(M)^u$。

このとき $\bar{f}_\alpha$, $\bar{f}_\beta$ の関係式は.

$$\bar{n}(g,h,k)^{\alpha_{g}l_\alpha(h,k)}\,\bar{n}(e,g,hk)\,\bar{f}_\alpha(g,h,k)$$
$$=\bar{f}_\beta(g,h,k)\,\bar{n}(e,g,h)^{l_\alpha(g,h)}\,\bar{n}(e,gh,k)$$

となる。

特に $\bar{f}_\alpha(g,h,k)=1$、即ち $l_\alpha\in Z^2(G,M^u)$ のとき

l_β は l_α の $\bar{n}(g,h,k)\in\mathfrak{Z}(M)^u$ による Perturbation

とみると

$$\bar{n}(g,h,k)^{\alpha_{g}l_\alpha(h,k)}\,\bar{n}(e,g,hk)^{l_\alpha(g,h)}\,\bar{n}(e,gh,k)^{-1}\,\bar{n}(e,g,h)^{-1}$$
$$=\bar{f}_\beta(g,h,k)$$

となる。

この $\bar{f}_\beta$ を3-コバンダリーという。

$\alpha_{g}l_\alpha(h,k)=l_\alpha(h,k)$ のとき $\bar{n}(g,h,k)=\bar{n}(e,h,k)$

となり $\bar{u}(g,h)=\bar{n}(e,g,h)$ とおけば l_β はちょうど

l_α の $\bar{u}(g,h)\in\mathfrak{Z}(M)^u$ による Perturbation となる。

3次元コホモロジーは

$$H^3(G,\mathfrak{Z}(M)^u)=Z^3(G,\mathfrak{Z}(M)^u)/\sim$$

と定義できる。

我々の考察は

$$1\longrightarrow\mathfrak{Z}(M)^u\longrightarrow M^u\longrightarrow \mathrm{Aut}\,M\longrightarrow \mathrm{Out}\,M\longrightarrow 1$$

の場合であったが、実際は、

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Aut}\,G_4 & \mathrm{Aut}\,G_3 & \mathrm{Aut}\,G_2 & \mathrm{Aut}\,G_1 & \\
 & \mathrm{Int}\,G_4 \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{Int}\,G_3 \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[ul] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{Int}\,G_2 \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[ul] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{Int}\,G_1 \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[ul] \arrow[d, Rightarrow] & \\
1 \arrow[r, dash] & G_4 \arrow[r, dash, "\tau_3"] & G_3 \arrow[r, dash, "\tau_3"] & G_2 \arrow[r, dash, "\tau_2"] & G_1 \arrow[r, dash, "\tau_1"] & 1
\end{tikzcd}
$$

に対応する。

上のダイアグラムにおいて

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Int}(\ ) \arrow[d, Rightarrow] \\
(\ )
\end{tikzcd}
$$

は内部自己同型写像による作用

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}(\ ) & \\
 & \mathrm{Int}(\ ) \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

は図に両立する内部自己同型写像のリフトを表わす。

Remark.

$H^3(G, \mathfrak{Z}(M)^u)$ は定義により $\alpha_g \overline{\iota_\alpha(g,h)} = \overline{\alpha_g \iota_\alpha(g,h)}$ の自己同型写像 α_g の選択によらない。